Changement de base pour la matrice d'une application linéaire

$\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$ sont deux $\mathbb{R}$-e.v. de dimension $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{u : E \to F}$ est une application linéaire.

On considère $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{E}'}$ deux bases de $\boldsymbol{E}$.

On considère $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}'}$ deux bases de $\boldsymbol{F}$.

On note $\boldsymbol{A}$ la matrice de $\boldsymbol{u}$ dans les base $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}}$. $(A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u))$

On note $\boldsymbol{B}$ la matrice de $\boldsymbol{u}$ dans les bases $\boldsymbol{\mathcal{E}'}$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}'}$. $(B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u))$

On note $\boldsymbol{P}$ la matrice de passage de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ à $\boldsymbol{\mathcal{E}'}$. $(P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E))$

On note $\boldsymbol{Q}$ la matrice de passage de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ à $\boldsymbol{\mathcal{F}'}$. $(P = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}(\mathrm{Id}_F))$

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{m,1}}(\mathbb{R}) \arrow[r, mapsto, "\times \boldsymbol{A}"] \arrow[dd, mapsto, bend right, "\times \boldsymbol{P^{-1}}"'] \arrow[dd, phantom, "\begin{array}{c}\text{Changement}\\ \text{de base entre}\\ \mathcal{E} \text{ et } \mathcal{E}'\end{array}"] & \boldsymbol{AX} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{n,1}}(\mathbb{R}) \arrow[dd, mapsto, bend right, "\times \boldsymbol{Q^{-1}}"'] \arrow[dd, phantom, "\begin{array}{c}\text{Changement}\\ \text{de base entre}\\ \mathcal{F} \text{ et } \mathcal{F}'\end{array}"] & \\
\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} \arrow[ur, "\text{coordonnées dans } \boldsymbol{\mathcal{E}}"] \arrow[dr, "\text{coordonnées dans } \boldsymbol{\mathcal{E}'}"'] & & & \boldsymbol{u(x)} \in \boldsymbol{E} \arrow[ul, "\text{coordonnées dans } \boldsymbol{\mathcal{F}}"'] \arrow[dl, "\text{coordonnées dans } \boldsymbol{\mathcal{F}'}"] \\
 & \boldsymbol{X'} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{m,1}}(\mathbb{R}) \arrow[r, mapsto, "\times \boldsymbol{B}"] \arrow[uu, mapsto, bend right, "\times \boldsymbol{P}"'] & \boldsymbol{BX'} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{n,1}}(\mathbb{R}) \arrow[uu, mapsto, bend right, "\times \boldsymbol{Q}"'] &
\end{tikzcd}$$

Pour exprimer BX' en fonction de A, P et X' :

- On part d'un vecteur colonne $\boldsymbol{X'}$ représentant un vecteur $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ dans la base $\boldsymbol{\mathcal{E}'}$
- On multiplie ce vecteur par $\boldsymbol{P}$: on obtient le vecteur colonne $\boldsymbol{X = PX'}$ représentant $\boldsymbol{x}$ dans la base $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.
- On multiplie par $\boldsymbol{A}$: on obtient $\boldsymbol{AX = APX'}$ qui représente $\boldsymbol{u(x)}$ dans la base $\boldsymbol{\mathcal{F}}$
- On passe dans la base $\boldsymbol{\mathcal{F}'}$ en multipliant le résultat par $\boldsymbol{Q^{-1}}$: on obtient $\boldsymbol{Q^{-1}APX' = BX'}$ car chaque côté de l'égalité est l'expression de $\boldsymbol{u(x)}$ dans la base $\boldsymbol{\mathcal{F}'}$.

Puisque pour tout $X' \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ on a $(Q^{-1}AP)X' = BX'$ $\boxed{\text{on en déduit que } B = Q^{-1}AP.}$

On retient la formule générale suivante :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}}$$

Changement de base pour la matrice d'un endomorphisme

$\boldsymbol{E}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{u : E \to E}$ est un endomorphisme de $\boldsymbol{E}$.

On considère $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}'}$ deux bases de $\boldsymbol{E}$.

On note $\boldsymbol{A}$ la matrice de $\boldsymbol{u}$ dans la base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. ($A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$)

On note $\boldsymbol{B}$ la matrice de $\boldsymbol{u}$ dans le base $\boldsymbol{\mathcal{B}'}$. ($B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(u)$)

On note $\boldsymbol{P}$ la matrice de passage de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ à $\boldsymbol{\mathcal{B}'}$. ($P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$)

$$\begin{tikzcd}
 & X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \arrow[r, mapsto, "\times A"] \arrow[d, mapsto, bend right, "\times P^{-1}"'] \arrow[d, phantom, "\begin{array}{c}\text{Changement}\\ \text{de base entre}\\ \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B}'\end{array}"] & AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \arrow[dr, "\text{coordonnées dans } \mathcal{B}"] \arrow[d, mapsto, bend right, "\times P^{-1}"'] \arrow[d, phantom, "\begin{array}{c}\text{Changement}\\ \text{de base entre}\\ \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B}'\end{array}"] & \\
x \in E \arrow[ur, "\text{coordonnées dans } \mathcal{B}"] \arrow[dr, "\text{coordonnées dans } \mathcal{B}'"'] & & & u(x) \in E \\
 & X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \arrow[r, mapsto, "\times B"] \arrow[u, mapsto, bend right, "\times P"'] & BX' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \arrow[ur, "\text{coordonnées dans } \mathcal{B}'"'] \arrow[u, mapsto, bend right, "\times P"'] &
\end{tikzcd}$$

Pour exprimer BX' en fonction de A, P et X' :

- On part d'un vecteur colonne $\boldsymbol{X'}$ représentant un vecteur $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ dans la base $\boldsymbol{\mathcal{B}'}$
- On multiplie ce vecteur par $\boldsymbol{P}$: on obtient le vecteur colonne $\boldsymbol{X = PX'}$ représentant $\boldsymbol{x}$ dans la base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$.
- On multiplie par $\boldsymbol{A}$: on obtient $\boldsymbol{AX = APX'}$ qui représente $\boldsymbol{u(x)}$ dans la base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$
- On repasse dans la base $\boldsymbol{\mathcal{B}'}$ en multipliant le résultat par $\boldsymbol{P^{-1}}$: on obtient $\boldsymbol{P^{-1}APX' = BX}$ car chaque côté de l'égalité est l'expression de $\boldsymbol{u(x)}$ dans la base $\boldsymbol{\mathcal{B}'}$.

Puisque pour tout $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $(P^{-1}AP)X' = BX'$ $\boxed{\text{on en déduit que } B = P^{-1}AP.}$

On retient la formule générale suivante :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}$$